



TITLE:

社会的選択に関するChichilniskyの 考察について(位相幾何学と経済学)

AUTHOR(S):

松江, 広文

CITATION:

松江, 広文. 社会的選択に関するChichilniskyの考察について(位相幾何学と経済学). 数理解析研究所講究録 1983, 478: 104-116

ISSUE DATE:

1983-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103350>

RIGHT:

社会的選択に関する Chichilnisky の考察について

成城大 経済 松江 広文

Hirofumi Matsue

選好順序を考えた社会的選択の理論については、[1], [4], [5], [6] が扱っている。一方、social aggregation rule が Pareto condition を満たすという条件の下で、Chichilnisky が [2] で同じ問題を扱ったので、これを紹介する。数学的に冗長な部分と、あいまいな部分があったので、配列を変え、幾分わかり易い形に書き直した。写像度を用いる部分があるが、[3] を参考にされたい。

1. 記号と定義

- ① choice space $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を考える。ただし、 X は closed unit ball $B^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に C^2 -diffeomorphic とする。
- ② utility C^2 -function $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。ただし

$(\text{grad } u)_x = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)_x, \dots, \left(\frac{\partial u}{\partial x_{n+1}} \right)_x \right) \neq 0, \text{ for } \forall x \in X$
とする。

③ $p(x) = \frac{(\text{grad } u)_x}{\|(\text{grad } u)_x\|}$ とおく。 $p: X \rightarrow S^n$ である。

この p を preference という。(図1. 参照)

④ $P = \{p; \text{preference}\}$ とし。これに C' -sup norm で topology を入れる。

⑤ k -voters ($k \geq 2$) を考え。

$$P^k = \{(p_1, p_2, \dots, p_k); p_i \in P\}$$

とする。 P^k の元 (p_1, p_2, \dots, p_k) を profile という。

⑥ continuous map $\phi: P^k \rightarrow P$ を, social aggregation rule という。

定義1. rule ϕ が Pareto condition を満たす。(図1.~3.)

$$\stackrel{\text{def.}}{\iff} \phi(p_1, p_2, \dots, p_k) = p \text{ の時. } \forall x \in X \text{ に対して.}$$

inner products

$$p_1(x) \cdot (y-x) \geq 0, \dots, p_k(x) \cdot (y-x) \geq 0$$

$$\implies p(x) \cdot (y-x) \geq 0.$$

定義2. rule ϕ が weak positive association condition を満たす。

$$\stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists i \in \{1, 2, \dots, k\}, \exists (p_1, p_2, \dots, p_k) \in P^k$$

$$\text{s.t. } \phi(p_1, \dots, p_i, \dots, p_k) = -p_i$$

$$\implies \phi(-p_i, \dots, -p_i, \overset{i\text{-th}}{p_i}, -p_i, \dots, -p_i) \neq p_i.$$

⑦ Pareto rule が *weak positive association condition* を満たすとき、W-Pareto rule という。

定義3. rule ϕ が unanimity である。

$$\begin{aligned} \iff_{\text{def.}} \quad & \forall p \in P \text{ に対して, } \phi(p, p, \dots, p) = p \text{ である.} \\ & \left[\begin{array}{l} \text{すなわち, } D = \{(p, p, \dots, p); p \in P\} \text{ とお} \\ \text{き, } \underset{\downarrow}{\text{in}}_D : \underset{\downarrow}{P} \longrightarrow \underset{\downarrow}{D} \subset \underset{\downarrow}{P^k} \\ \quad \quad \quad p \longmapsto (p, p, \dots, p) \\ \text{とおくと, } \phi \circ \text{in}_D = \text{id}_P, (P \text{ 上の恒等写像}) \\ \text{である.} \end{array} \right] \end{aligned}$$

注意. Pareto rule は unanimity である。(後に証明)

定義4. preference p が linear である。

$$\iff_{\text{def.}} \quad p \text{ が } X \text{ 上の linear utility function により induce される.}$$

注意. u が linear utility function であるとは、

ある $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ を選んで

$u(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in X$ と書けることである。

この時、 $p(x) = (\text{grad } u)_x = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ である。

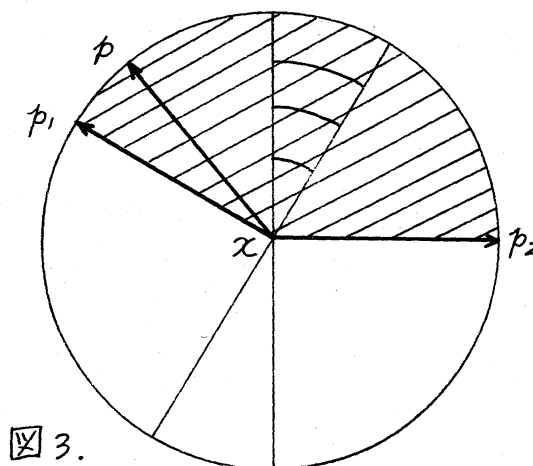
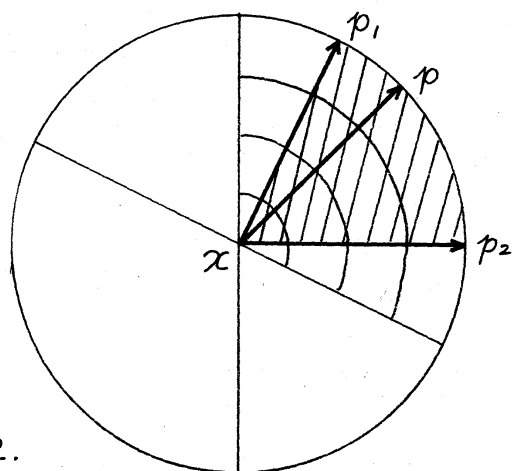
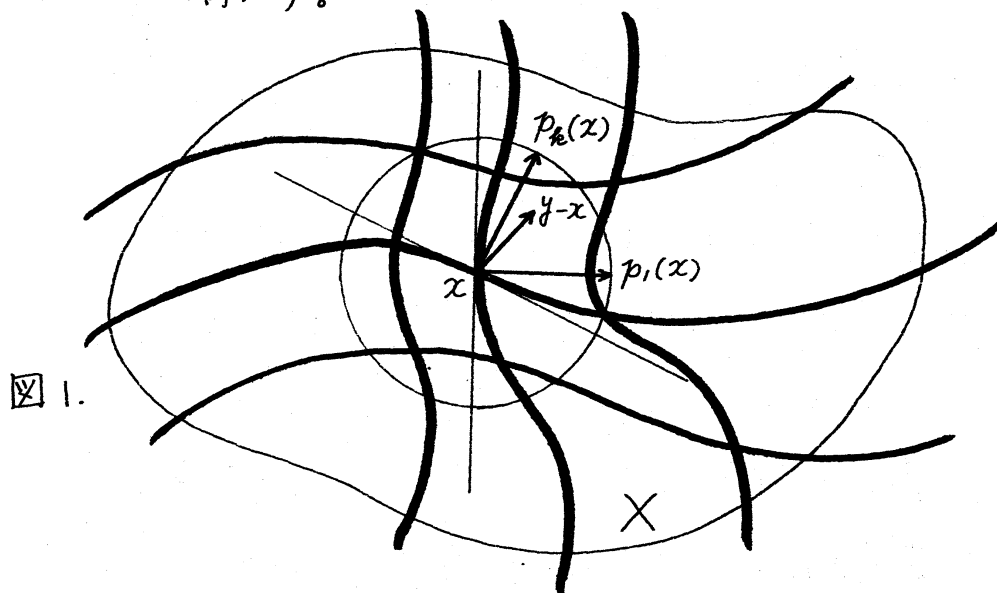
定義5. aggregation rule ϕ_d が dictatorial で、dictator d をもつ。

$$\iff_{\text{def.}} \quad \phi_d \text{ は } d\text{-th coordinate への projection である.}$$

すなわち、 $\forall (p_1, \dots, p_d, \dots, p_k) \in P^k$ に対し
 $\phi_d(p_1, \dots, p_d, \dots, p_k) = p_d$ である。

定義6. $f, g: Y \rightarrow Z$ を continuous maps とする。 f は homotopic to g である、あるいは、 f は g の continuous deformation である。

$\iff_{\text{def.}}$ continuous map $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ が存在し、
 $\forall y \in Y$ に対し、 $H(y, 0) = f(y)$ と $H(y, 1) = g(y)$
 とを満たす。



2. 特別な場合の定理

ここでは、voter の数 $n = 2$ で、preference が linear の場合について考える。

$n \geq 1$ の時、 \mathbb{R}^{n+1} 内の単位球を S^n とする。

$\bar{P} = \{p: \text{linear preference}\}$ に対し、 $(p_1, p_2) \in \bar{P}^2$ をとると、 $p_1(x), p_2(x) \in S^n$ は $x \in X$ のとり方によらない。
従って、 $(p_1, p_2) \in (S^n)^2 = \bar{P}^2$ と考えてよい。

$\phi: (S^n)^2 \rightarrow S^n = \bar{P}$ が Pareto condition を満たす時、

$p = \phi(p_1, p_2)$ を調べよう。

(i) $p_2 \neq p_1$ かつ $p_2 \neq -p_1$ の時。

$Y_1 = \{y; p_1 \cdot (y-x) \geq 0 \text{ かつ } p_2 \cdot (y-x) \geq 0\}$ とおく

と、 p は、 $\forall y \in Y_1$ に対し、 $p \cdot (y-x) \geq 0 \dots (1)$

を満たさなければならない。

p_1, p_2 は 1 次独立である。 p_1, p_2 で張られる平面を $\mathcal{L}(p_1, p_2)$ とすると、 $\{y-x; y \in Y_1\} \subset \mathcal{L}(p_1, p_2)^\perp$

である。 $\forall u \in \mathcal{L}(p_1, p_2)^\perp$ をとると、(1) より $p \cdot u \geq 0$,

また、 $-u \in \mathcal{L}(p_1, p_2)^\perp$ より、 $p \cdot (-u) \geq 0$ 、従って、

$p \cdot u \leq 0$ 、ゆえに $p \cdot u = 0$ である。すなわち、

$p \in \mathcal{L}(p_1, p_2)$ がわかった。

次に、図 2, 図 3 より、 $p \in \widehat{p_1 p_2}$ がいえる。

(ii) $p_2 = p_1$ の時.

$Y_2 = \{y; p_1 \cdot (y-x) \geq 0\}$ とおくと, p は, $\forall y \in Y_2$ に対し, $p \cdot (y-x) \geq 0$ を満たす. 従って $p = p_1$, すなわち, $\phi(p_1, p_1) = p_1$ である.

注意. $[p(x) \cdot (y-x) \geq 0, \dots, p(x) \cdot (y-x) \geq 0 \implies \phi(p, \dots, p)(x) \cdot (y-x) \geq 0]$ より.

上と同様の論法で, $\phi(p, \dots, p)(x) = p(x)$, $\forall x \in X$, すなわち, $\phi(p, \dots, p) = p$ がいえる. 従って, Pareto rule は unanimity である.

(iii) $p_2 = -p_1$ の時.

$p_1 \cdot (y-x) \geq 0$ かつ $-p_1 \cdot (y-x) \geq 0$ より, $p_1 \cdot (y-x) = 0$ である. $Y_3 = \{y; p_1 \cdot (y-x) = 0\}$ とおくと.

$\{y-x; y \in Y_3\} = \mathcal{L}(p_1)^\perp$, 従って $p \in \mathcal{L}(p_1)$ である.

すなわち, $p = p_1$ または $p = -p_1$ である.

定理 1. social aggregation rule $\phi: \bar{P}^2 \rightarrow \bar{P}$ が Pareto condition を満たすならば, ϕ は, ある dictatorial rule に homotopic である.

証明. $p_0 \in \bar{P}$ をかってな linear preference とする. ϕ が Pareto condition を満たすことより.

$$\phi(p_0, -p_0) = p_0 \quad \text{または} \quad \phi(p_0, -p_0) = -p_0$$

である.

$\phi(p_0, -p_0) = p_0$ の場合.

ϕ の continuity より, $\forall p \in S^n$ に対し, $\phi(p, -p) = p$.

$$(\because) \begin{array}{ccc} \bar{P} & \longrightarrow & \bar{P}^2 \xrightarrow{\quad} \{1, -1\} \subset \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p & \longmapsto & (\phi(p, -p), p) \longmapsto \phi(p, -p) \cdot p \end{array}$$

この合成写像が continuous であることと, \bar{P} が connected であることより明らか.

また, $\forall (q_1, q_2) \in \bar{P}^2$ に対し, $\phi(q_1, q_2) \neq -q_1$ である.

$$(\because) \begin{array}{l} q_2 \neq q_1, -q_1 \text{ の時, } \phi(q_1, q_2) \in \widehat{q_1 q_2} \\ \therefore \phi(q_1, q_2) \neq -q_1. \end{array}$$

$$q_2 = q_1 \text{ の時, } \phi(q_1, q_1) = q_1 \neq -q_1.$$

$$q_2 = -q_1 \text{ の時, } \phi(q_1, -q_1) = q_1 \neq -q_1.$$

以上より, $H: \bar{P}^2 \times [0, 1] \rightarrow \bar{P}$ を

$$H((p_1, p_2), t) = \frac{tp_1 + (1-t)\phi(p_1, p_2)}{\|tp_1 + (1-t)\phi(p_1, p_2)\|}$$

と定義する. なお, 任意の $x \in X$ に対し, x と.

$tp_1 + (1-t)\phi(p_1, p_2)$ との inner product を考えれば, grad が $tp_1 + (1-t)\phi(p_1, p_2)$ となる linear utility function が定義できる.

$$\text{この時, } H((p_1, p_2), 0) = \phi(p_1, p_2),$$

$$H((p_1, p_2), 1) = p_1 = \phi_1(p_1, p_2) \quad \text{である.}$$

$\phi(p_0, -p_0) = -p_0$ の場合も同様に, ϕ は ϕ_2 に homotopic

であることがいえる。

従って、 Φ は、dictator 1 または 2 をもつ dictatorial rule に homotopic であることがわかった。□

3. 一般の場合の定理

2. では、voter の数 $k=2$ で、preference が linear の時、Pareto condition を満たす social aggregation rule は、必ず dictatorial rule に連続変形されることが証明された。以下では、voter の数 $k \geq 2$ で、preference が linear でなくとも、2. と同じ結果が得られることを証明する。

choice space X を考える。

写像 $\lambda: S^n \rightarrow P$ は、 $\forall x \in X$ に対し、 z に、linear

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\lambda} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \mapsto & p \end{array}$$

utility function $u(x) = z \cdot x$ の linear preference p を対応させる写像とする。 λ は continuous である。

次に X の元、choice x を 1 つ固定する。

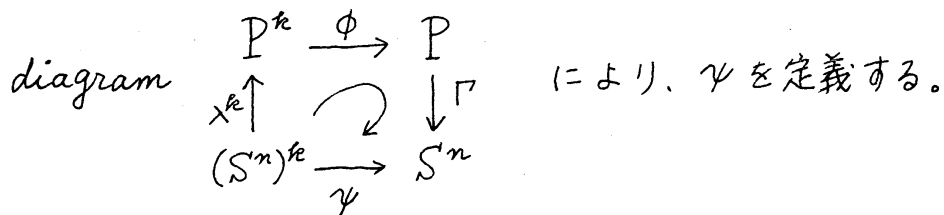
写像 $\Gamma: P \rightarrow S^n$ は continuous である。

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Gamma} & S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ p & \mapsto & p(x) \end{array}$$

このとき、定義より、commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \lambda \nearrow & & \searrow \Gamma \\ S^n & \xrightarrow{id_{S^n}} & S^n \end{array} \quad \text{が成り立つ。すなわち } \Gamma \circ \lambda = id_{S^n} \text{ である。}$$

$\phi: P^k \rightarrow P$ を W-Pareto rule とする。



すなわち、 $\psi(z_1, \dots, z_k) = \Gamma(\phi(\lambda(z_1), \dots, \lambda(z_k)))$,
 $\forall (z_1, \dots, z_k) \in (S^n)^k$ である。 ψ は continuous である。

$z_1, z_2 \in S^n$ とする。 $z_1 \neq z_2, -z_2$ の時、 S^n 内で z_1, z_2 を通る大円を考える。 この大円の、 z_1, z_2 を結ぶ短かい方の弧を、 $C(z_1, z_2)$ と書く。(図4.)

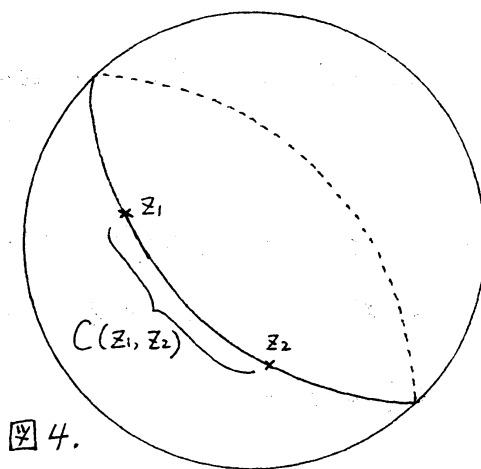


図4.

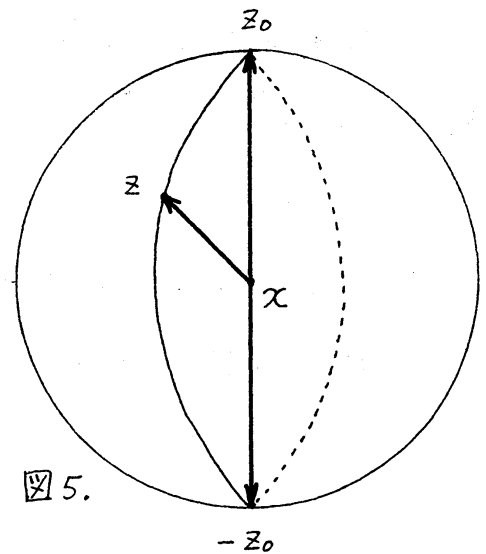


図5.

$z_0 \in S^n$ を固定する。

$G_i = \{(z_0, \dots, \overset{i\text{-th}}{z}, z_0, \dots, z_0); z \in S^n\} \subset (S^n)^k$ とする。

ϕ は Pareto rule だから、 次のことがいえる。(図5)

$z \neq z_0, -z_0$ の時、 $\psi(z_0, \dots, \overset{i\text{-th}}{z}, z_0, \dots, z_0) \in C(z_0, z)$

$z = z_0$ のとき, $\psi(z_0, \dots, \overset{i\text{-th}}{z_0}, z_0, \dots, z_0) = z_0$,

$z = -z_0$ のときは次の(イ), (ロ)の場合がある。

$$\begin{aligned} \psi(z_0, \dots, \overset{i\text{-th}}{-z_0}, z_0, \dots, z_0) &= z_0 \dots \text{(イ)} \\ &\text{or} \\ &= -z_0 \dots \text{(ロ)} \end{aligned}$$

以上のことより, $\text{in}_{q_i} : S^n \rightarrow (S^n)^k$ を.

$\text{in}_{q_i}(z) = (z_0, \dots, \overset{i\text{-th}}{z}, z_0, \dots, z_0)$ と定義すれば.

(イ)の場合, $\psi \circ \text{in}_{q_i} : S^n \rightarrow S^n$ は onto でない。従って.

$$\deg(\psi \circ \text{in}_{q_i}) = 0 \text{ である。}$$

(ロ)の場合, $\psi \circ \text{in}_{q_i}$ は id_{S^n} に homotopic。従って.

$$\deg(\psi \circ \text{in}_{q_i}) = 1 \text{ である。}$$

$\text{in}_{D_S} : S^n \rightarrow (S^n)^k$ を.

$\text{in}_{D_S}(z) = (z, \dots, z) \in (S^n)^k$ により定義すると.

$\psi \circ \text{in}_{D_S} = \text{id}_{S^n}$ である。

(\because) ϕ が unanimity であることと, $\Gamma \circ \lambda = \text{id}_{S^n}$ であることから明らか。

従って, $\deg(\psi \circ \text{in}_{D_S}) = 1$ 。

$[\text{in}_{q_i}], [\text{in}_{D_S}] \in \pi_n((S^n)^k) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ は次のようにあらわせる。

$$[\text{in}_{q_i}] = (0, \dots, \overset{i\text{-th}}{0, 1, 0, \dots, 0}),$$

$$[\text{in}_{D_S}] = (1, \dots, \dots, 1)。$$

従って、 $\sum_{i=1}^k [in_{G_i}] = [in_{D_S}]$ である。

次に、 $\psi_*: \pi_n((S^n)^k) \rightarrow \pi_n(S^n)$ を考えると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \psi_*[in_{G_i}] &= \psi_*[in_{D_S}]. \quad \therefore \sum_{i=1}^k [\psi \circ in_{G_i}] = [\psi \circ in_{D_S}], \\ &\therefore \sum_{i=1}^k \deg(\psi \circ in_{G_i}) = \deg(\psi \circ in_{D_S}) = 1. \end{aligned}$$

従って、 $\exists! d \in \{1, \dots, k\}$, s.t. $\deg(\psi \circ in_{G_d}) = 1$, また、

$$i \neq d \text{ ならば } \deg(\psi \circ in_{G_i}) = 0.$$

すなわち、 $\psi \circ in_{G_d}(-z_0) = \psi(z_0, \dots, z_0, \overset{d\text{-th}}{-z_0}, \dots, z_0) = -z_0$, また、

$$i \neq d \text{ ならば } \psi \circ in_{G_i}(-z_0) = \psi(z_0, \dots, z_0, \overset{i\text{-th}}{-z_0}, \dots, z_0) = z_0.$$

$$\forall z \in S^n \text{ に対し、 } \psi(-z, \dots, -z, \overset{d\text{-th}}{z}, -z, \dots, -z) = z \cdots (*)$$

が成り立つ。

$$(\because) S^n \rightarrow \{1, -1\} \subset \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{c} \psi \\ z \mapsto \psi(-z, \dots, -z, \overset{d\text{-th}}{z}, -z, \dots, -z) \cdot z \end{array}$$

が continuous であることと、 S^n が connected であることより明らか。

$$\forall (z_1, \dots, z_d, \dots, z_k) \in (S^n)^k \text{ に対し、 } \psi(z_1, \dots, z_d, \dots, z_k) \neq -z_d.$$

$$(\because) \exists (z_1, \dots, z_d, \dots, z_k) \in (S^n)^k, \text{ s.t. } \psi(z_1, \dots, z_d, \dots, z_k) = -z_d$$

と仮定すると、 ϕ が W -Pareto rule であることより

$$\psi(-z_d, \dots, -z_d, z_d, -z_d, \dots, -z_d) \neq z_d \text{ となり、 } (*) \text{ に反する。}$$

以上のことから、各 $x \in X$ を固定するごとに、

$\exists d(x) \in \{1, \dots, k\}, \forall (z_1, \dots, z_{d(x)}, \dots, z_k) \in (S^n)^k$ に対し.

$\psi(z_1, \dots, z_{d(x)}, \dots, z_k) \neq -z_{d(x)}$ であることがわかる。

ところが、 ϕ が continuous であることと、 X が connected であることより、 $d(x)$ は x のとり方によらない。

従って、 $\forall \text{profile } (p_1, \dots, p_d, \dots, p_k) \in P^k$ に対し.

$\phi(p_1, \dots, p_d, \dots, p_k)(x) \neq -p_d(x), \forall x \in X$ である。

homotopy を

$$H((p_1, \dots, p_k), t)(x) = \frac{tp_d(x) + (1-t)\phi(p_1, \dots, p_k)(x)}{\|tp_d(x) + (1-t)\phi(p_1, \dots, p_k)(x)\|}$$

で定義し、各 t に対し、

utility function を $u_t(x) = tu_d(x) + (1-t)u(x)$ とする。ただし、

u_d は d 番目の voter の utility function であり、 u は social aggregation rule $\phi(p_1, \dots, p_k)$ に対応する utility function である。

以上より、次の定理が証明された。

定理 2. $\phi: P^k \rightarrow P$ を W -Pareto rule とすれば、 ϕ はある dictatorial rule に homotopic である。

- [1] Arrow, K. J., Social Choice and Individual Values, Wiley, 1963.
- [2] Chichilnisky, G., "The Topological Equivalence of the Pareto Condition and the Existence of a Dictator", Journal of Math. Economics, 9, 1982, p. 223-233.
- [3] 松江広文, "写像度について", 位相幾何学と経済学 (数理解析研究所講究録, 407), 1980, p. 27-38.
- [4] 二階堂副包 (編), 経済の数理. 第5章, 筑摩, 1977.
- [5] Sen, A. K., Collective Choice and Social Welfare, Holden-Day, 1970.
- [6] Suzumura, K., "Rational Choice, Collective Decision and Social Welfare", 位相幾何学と経済学 (数理解析研究所講究録, 407), 1980, p. 1-9.